

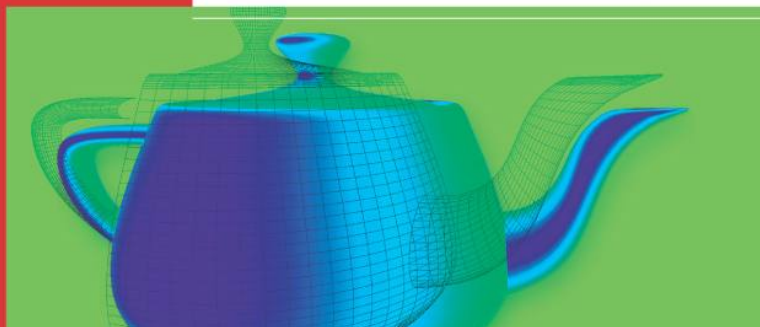
Michael Bender
Manfred Brill

Computer- grafik

Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch

HANSER

2. Auflage



Aufgaben und Lösungen

©Michael Bender, Manfred Brill
Oktober 2005

Sie finden in diesem Dokument alle Aufgaben und die zugehörigen Lösungen aus

Michael Bender, Manfred Brill: *Computergrafik*

2. Auflage, Hanser Verlag, München, 2006



<http://www.vislab.de/cgbuch>

Diese Unterlagen wurden mit L^AT_EX erstellt.

Kapitel 3

Geometrisches Modellieren mit Kurven und Flächen

3.2 Parameterkurven

1. Skizzieren Sie den Verlauf der Kurve

$$K(t) = \begin{cases} (t, 0) & 0 \leq t < 1, \\ (1, 0) + (t-1)\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & 1 \leq t < 2, \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (t-2)\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

Lösung:

Alle Kurvenstücke sind linear; als Bild ergibt sich Abbildung 3.1.

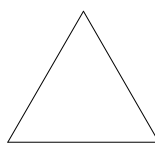


Abbildung 3.1: Die Lösung für Aufgabe 1

2. Weisen Sie nach, dass die Kurve

$$x(t) = a \frac{1-t}{1+t}, y(t) = 2a \frac{\sqrt{t}}{1+t}$$

einen Teil eines Kreises realisiert, falls als Parameterintervall $[0, \infty)$ verwendet wird! Wo liegt der Mittelpunkt dieses Kreises, wie groß ist der Radius?

Lösung:

Die Punkte $(x(t), y(t))$ liegen alle auf einem Kreis; denn es ist

$$x(t)^2 + y(t)^2 = a^2 \frac{(1-t)^2}{(1+t)^2} + 4a^2 \frac{t}{(1+t)^2} = \frac{a^2 - 2ta^2 + t^2a^2 + 4a^2t}{(1+t)^2} = a^2.$$

Dann ist auch klar, dass der Ursprung der Mittelpunkt ist, der Radius ist a .

Für $t = 0$ erhält man den Punkt $(a, 0)$; die Grenzwerte für $t \rightarrow \infty$ sind gegeben als

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a \frac{1-t}{1+t} = -a, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} 2a \frac{\sqrt{t}}{1+t} = 0.$$

Dann stellt die gegebene Kurve einen Halbkreis dar, beginnend bei $(a, 0)$; asymptotisch bis $(-a, 0)$; dieser Punkt wird allerdings nie erreicht.

3. Skizzieren Sie den Verlauf der Kurve, die durch $r = 1 + \cos(t)$, $\varphi = t$, $t \in [0, 2\pi)$ gegeben ist! Bestimmen Sie die Bogenlänge!

Lösung:

Die Lösung ist die sogenannte *Kardioide* in Abbildung 3.2. Die Kardioide ist der geometrische Ort, der von einem Punkt eines Kreises von Radius $2a$ beschrieben wird, der ohne zu gleiten auf einem anderen Kreis vom Radius $2a$ rollt. In der Aufgabe war $a = \frac{1}{2}$. Als Bogenlänge ergibt das Integral den Wert 8.

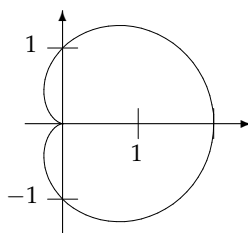


Abbildung 3.2: Die Kardioide als Lösung von Aufgabe 3

4. Berechnen Sie die Tangenten an eine Ellipse für $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$. Skizzieren Sie die Ellipse, die Tangenten und die entsprechenden Normalenvektoren!

Lösung:

Die Tangenten für eine Ellipse mit den Radien R_1, R_2 sind gegeben durch

$$\mathbf{t}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} -R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} -R_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_{\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R_2 \end{pmatrix}.$$

Die Skizze sehen Sie in Abbildung 3.3.

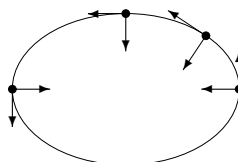


Abbildung 3.3: Die Ellipse, Tangenten und Normalen als Lösung von Aufgabe 4

5. Skizzieren Sie den Verlauf der Kurve $K(t) = (\sin t, \sin t \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Tragen Sie für $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ die Tangenten und Normalen auf! Bestimmen Sie die Krümmung κ_2 und die Bogenlänge!

Lösung:

Die Lösung ist die sogenannte Lemniskate von Geronno; die Skizze sehen Sie in Abbildung 3.4. Die Krümmung κ_2 ist gegeben durch

$$\kappa_2(t) = \frac{-4 \cos^2 t \sin t + \sin t (\cos^2 t - \sin^2 t)}{(\cos^2 t + (\cos^2 t - \sin^2 t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Abbildung 3.5 zeigt den Verlauf der Krümmung. Die Bogenlänge ist durch das Integral gegeben als 6,09722.

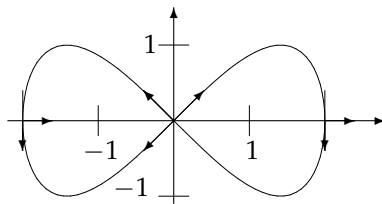


Abbildung 3.4: Die Lemniskate von Geronno als Lösung der Aufgabe 5

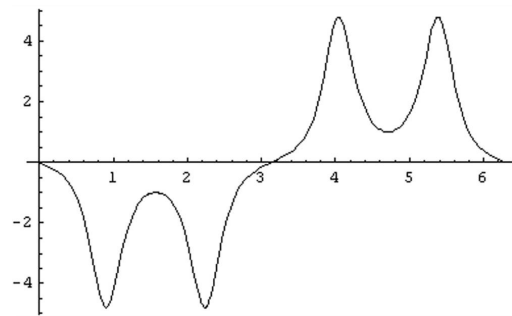


Abbildung 3.5: Die Krümmung κ_2 der Lemniskate von Geronno in Aufgabe 5

Die Tangenten und Normalen finden Sie in der Abbildung 3.4 und in Tabelle 3.1.

Tabelle 3.1: Die unnormalisierten Tangenten und Normalen an die Lemniskate in Aufgabe 5

Parameterwerte	$t = 0$	$t = \frac{\pi}{2}$	$t = \pi$	$t = \frac{3\pi}{2}$	$t = 2\pi$
Tangenten	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Normalen	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Ellipse in Abbildung 3.3, der Lösung von Aufgabe 4, ist gegeben als der geometrische Ort der Punkte, für die die Summe der Abstände zu zwei gegebenen Brennpunkten F_1 und F_2 konstant ist. Die Lemniskate von Bernoulli ist gegeben als geometrischer Ort aller Punkte, für die das Produkt der Abstände zu den Brennpunkten konstant ist. Allgemein ist eine Lemniskate von Bernoulli gegeben durch die Parameterdarstellung

$$K_a(t) = \left(\frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right).$$

Dabei liegen die beiden Brennpunkte dann in $(\pm a\sqrt{2}, 0)$.

6. Bestimmen Sie das Frenet'sche Bezugssystem für die logarithmische Spirale

$$K(t) = \begin{pmatrix} ae^{bt} \cos t \\ ae^{bt} \sin t \\ ct \end{pmatrix}!$$

Lösung:

Eine grafische Darstellung der logarithmischen Spirale $(ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t)$ sehen Sie in Ab-

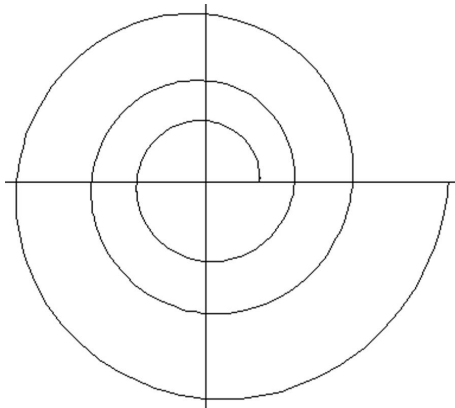


Abbildung 3.6: Die logarithmische Spirale im Parameterintervall $[0; 6\pi]$ für Aufgabe 6

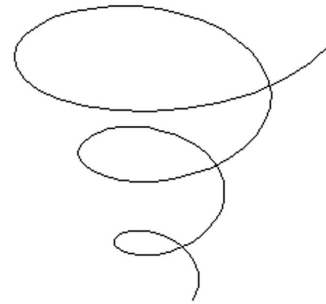


Abbildung 3.7: Die Schraubenlinie für die logarithmische Spirale im Parameterintervall $[0; 6\pi]$ für Aufgabe 6

bildung 3.6; die Schraubenlinie darüber ist durch $(ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t, ct)$ gegeben; ihr Bild finden Sie in Abbildung 3.7. Für das Frenet'sche Bezugssystem ergibt sich:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2(1+b^2)}e^{2bt}} \begin{pmatrix} ae^{bt}(b \cos t - \sin t) \\ ae^{bt}(\cos t + b \sin t) \\ c \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}(t) = \frac{1}{(1+b)\sqrt{c^2 + a^2}e^{2bt}} \begin{pmatrix} -c(2b \cos t + (b^2 - 1) \sin t) \\ c((b^2 - 1) \cos t - 2b \sin t) \\ a(1+b^2)e^{bt} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b} \times \mathbf{v}.$$

3.3 Polynomiale Kurven

1. Welcher Kegelschnitt ist durch die implizite Darstellung $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 6y + 7 = 0$ gegeben? Skizzieren Sie den Kurvenverlauf!

Lösung:

Die Kurve ist eine Parabel, denn die Diskriminante ist Null. In Abbildung 3.8 finden Sie eine Skizze.

2. Rechnen Sie nach, dass die rationalen quadratischen Polynome wirklich eine affine Kombination der Kontrollpunkte darstellen!

Lösung:

Die Formel kann geschrieben werden als $\sum_{i=1}^3 \lambda_i P_i$, dabei sind die Koeffizienten gegeben durch

$$\lambda_1 = \frac{(1-t)^2}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2},$$

$$\lambda_2 = \frac{2wt(1-t)}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2},$$

$$\lambda_3 = \frac{t^2}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2}.$$

Diese addieren sich offensichtlich zu 1 auf.

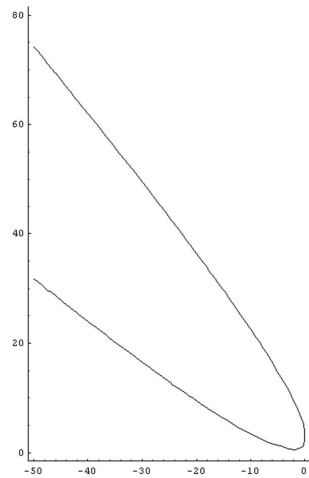


Abbildung 3.8: Der Kegelschnitt für Aufgabe 1

3. Der Kreis kann als rationale Kurve mit den Kontrollpunkten P_0, P_1 und P_2 als Parameterkurve dargestellt werden; dabei ist das Gewicht $w = \cos 60^\circ$, dem Innenwinkel eines gleichwinkligen Dreiecks, wie in Abbildung 3.9. Positionieren Sie die Kontrollpunkte wie in Abbildung 3.9. Insgesamt erhalten Sie drei Kreissegmente. Skizzieren Sie den Kurvenverlauf für jeweils 5 Punkte pro Segment. Vergleichen Sie diese Darstellung mit der Parameterdarstellung mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen!

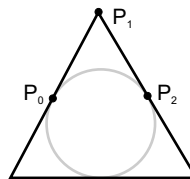


Abbildung 3.9: Gleichwinkliges Dreieck und Inkreis

Lösung:

Das Gewicht ist für alle drei Kurvenstücke immer $w = \cos 60^\circ = 0,5$.

Die Segmente ergeben sich durch die folgenden Kontrollpunkte:

- P_0, D_2 und P_2 , erstreckt sich von P_0 bis P_2 ;
- P_2, D_1 und P_1 , erstreckt sich von P_2 bis P_1 ;
- P_1, D_0 und P_0 , erstreckt sich von P_1 bis P_0 .

Für das Dreieck ist jedes gleichwinklige Dreieck zu verwenden. Eine mögliche Wahl für das Dreieck ist $D_0 = (0, 0)$, $D_1 = (1, 0)$ und $D_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Wenn Sie an den Punkten P_i jeweils die Tangenten und Krümmungen bestimmen, dann erkennen Sie, dass der mit den rationalen Polynomen dargestellte Kreis nur C^1 - bzw. G^1 -stetig ist. Und er ist nicht nach seiner Bogenlänge parametrisiert!

Eine grafische Darstellung der Kurve mit den Kontrollpunkten finden Sie in Abbildung 3.10 auf Seite 30.

4. Wie viele Multiplikationen benötigt die Auswertung eines Polynoms $p(x)$ vom Grad m in Monom-Darstellung, d. h. $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot M_i(x)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $t \in [a, b]$? Wie viele Multiplikationen benötigt man bei Anwendung des Horner-Schemas?

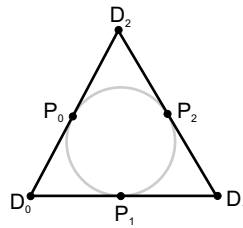


Abbildung 3.10: Der Kreis als rationale Kurve in Aufgabe 3 mit den Kontrollpunkten

Lösung:

Monom-Darstellung: $m - 1$ Multiplikationen für die Berechnung der Potenzen und m Multiplikationen für die Berechnung der Summanden; insgesamt damit $2m - 1$ Multiplikationen ($m > 0$).

Horner-Schema: m Multiplikationen.

3.4 Bézier-Kurven und -Kurvensegmente

1. Zeigen Sie, wie die Darstellung eines Bernstein-Polynoms $B_i^m(t)$ über dem Intervall $t \in [0, 1]$ mittels der affinen Parameter-Transformation $s = a + (b - a)t$ in die Darstellung eines Bernstein-Polynoms $\tilde{B}_i^m(s)$ über dem Intervall $s \in [a, b]$ übergeht!

Lösung:

Es gilt $s = a + (b - a)t$, also $t = \frac{s-a}{b-a}$. Weiterhin ist $B_i^m(t) = \binom{m}{i} t^i (1-t)^{m-i}$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_i^m(s) &= B_i^m(t) \\
 &= B_i^m\left(\frac{s-a}{b-a}\right) \\
 &= \binom{m}{i} \left(\frac{s-a}{b-a}\right)^i \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right)^{m-i} \\
 &= \binom{m}{i} \left(\frac{s-a}{b-a}\right)^i \left(\frac{b-s}{b-a}\right)^{m-i} \\
 &= \binom{m}{i} \frac{(s-a)^i (b-s)^{m-i}}{(b-a)^i (b-a)^{m-i}} \\
 &= \frac{1}{(b-a)^m} \binom{m}{i} (s-a)^i (b-s)^{m-i},
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

2. Zeigen Sie die Eigenschaften 2 und 6 der Bernstein-Polynome!

Lösung:

Eigenschaft 2: Die Bernstein-Polynome bilden eine Teilung der Eins, d. h. für alle $t \in [a, b]$ gilt $\sum_{i=0}^m B_i^m(t) = 1$.

Die binomische Reihe lautet

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^m B_i^m(t) &= \sum_{i=0}^m \frac{1}{(b-a)^m} \binom{m}{i} (t-a)^i (b-t)^{m-i} \\
 &= \frac{1}{(b-a)^m} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (t-a)^i (b-t)^{m-i} \\
 &= \frac{1}{(b-a)^m} (b-a)^m \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Eigenschaft 6: Ein Bernstein-Polynom vom Grad m lässt sich als Konvex-Kombination von Bernstein-Polynomen vom Grad $m-1$ darstellen. Für das Intervall $[0, 1]$ ist $B_i^m(t) = t \cdot B_{i-1}^{m-1}(t) + (1-t) \cdot B_i^{m-1}(t)$ zu zeigen.

Für den Binomialkoeffizienten gilt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 B_i^m(t) &= \binom{m}{i} t^i (1-t)^{m-i} \\
 &= \left\{ \binom{m-1}{i} + \binom{m-1}{i-1} \right\} t^i (1-t)^{m-i} \\
 &= \binom{m-1}{i} t^i (1-t)^{m-i} + \binom{m-1}{i-1} t^i (1-t)^{m-i} \\
 &= (t-1) \cdot \binom{m-1}{i} t^i (1-t)^{(m-1)-i} + t \cdot \binom{m-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{(m-1)-(i-1)} \\
 &= (t-1) \cdot B_i^{m-1}(t) + t \cdot B_{i-1}^{m-1}(t).
 \end{aligned}$$

3. Zeigen Sie die Ableitungsformel (Eigenschaft 7) der Bernstein-Polynome über dem Intervall $[a, b]$ für $j = 1, 2!$

Lösung:

Erste Ableitung, $j = 1$:

Per Hand (Produktregel, Kettenregel) folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} B_i^m(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{(b-a)^m} \binom{m}{i} (t-a)^i (b-t)^{m-i} \right\} \\
 &= \frac{1}{(b-a)^m} \binom{m}{i} \frac{d}{dt} \left\{ (t-a)^i (b-t)^{m-i} \right\} \\
 &= \frac{1}{(b-a)^m} \frac{m!}{(m-i)!i!} \{ i(t-a)^{i-1} (b-t)^{m-i} \\
 &\quad + (t-a)^i (m-i)(b-t)^{m-i-1}(-1) \} \\
 &= \frac{1}{(b-a)^m} \frac{m(m-1)!}{(m-i)!(i-1)!} (t-a)^{i-1} (b-t)^{(m-1)-(i-1)} \\
 &\quad - \frac{1}{(b-a)^m} \frac{m(m-1)!}{(m-i-1)!i!} (t-a)^i (b-t)^{m-i-1} \\
 &= \frac{m}{(b-a)^m} \left\{ \frac{(m-1)!}{(m-i)!(i-1)!} (t-a)^{i-1} (b-t)^{(m-1)-(i-1)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(m-1)!}{(m-1-i)!i!} (t-a)^i (b-t)^{m-i-1} \right\} \\
 &= \frac{m}{(b-a)} \left\{ \frac{1}{(b-a)^{m-1}} \binom{m-1}{i-1} (t-a)^{i-1} (b-t)^{(m-1)-(i-1)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(b-a)^{m-1}} \binom{m-1}{i} (t-a)^i (b-t)^{m-1-i} \right\} \\
 &= \frac{m}{(b-a)} \{ B_{i-1}^{m-1}(t) - B_i^{m-1}(t) \}.
 \end{aligned}$$

Für $j = 1$ folgt per Formel:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^j}{dt^j} B_i^m(t) &= \frac{1}{(b-a)^j} \frac{m!}{(m-j)!} \sum_{l=0}^j (-1)^l \binom{j}{l} B_{i-j+l}^{m-j}(t) \\
 &\quad - \frac{1}{(b-a)^{j-1}} \frac{m!}{(m-1)!} \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^l \binom{j-1}{l} B_{i-1+l}^{m-1}(t) \\
 &\quad - \frac{m}{b-a} \{ (-1)^0 \binom{1}{0} B_{i-1+0}^{m-1}(t) + (-1)^1 \binom{1}{1} B_{i-1+1}^{m-1}(t) \} \\
 &\quad - \frac{m}{b-a} \{ B_{i-1}^{m-1}(t) - B_i^{m-1}(t) \}
 \end{aligned}$$

Zweite Ableitung, $j = 2$: $\frac{d}{dt} B_i^m(t)$ erneut nach t ableiten.

4. Verifizieren Sie die Umschreibung der Darstellung unseres numerischen Beispiels von Monom-Basis in Bernstein-Basis mittels der in Eigenschaft 8 der Bernstein-Polynome erläuterten Basistransformation!

Lösung:

Wir müssen die Koeffizienten der Monombasis in die Koeffizienten der Bernstein-Basis umrechnen. Dies rechnen wir für unser numerisches Beispiel separat für die x- und die y-Koordinaten. Dabei gilt $(b_0, b_1, b_2, b_3) = (a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot A^{-1}$ mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

x-Koordinaten:

$$\begin{aligned}(b_0, b_1, b_2, b_3) &= (0, 6, 13.5, -8.5) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (0, 2, 8.5, 11)\end{aligned}$$

y-Koordinaten:

$$\begin{aligned}(b_0, b_1, b_2, b_3) &= (0, 13.5, -7.5, -4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (0, 4.5, 6.5, 2)\end{aligned}$$

5. Verifizieren Sie die Formel für die erste Ableitung eines Bézier-Kurvensegments auf dem Intervall $[0, 1]$ nach dem Parameter t !

Lösung:

Zu zeigen ist:

$$\frac{d}{dt}K(t) = m \sum_{i=0}^{m-1} (b_{i+1} - b_i) \cdot B_i^{m-1}(t).$$

Es ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}K(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=0}^m b_i \cdot B_i^m(t) \right\} \\ &= \sum_{i=0}^m b_i \frac{d}{dt} B_i^m(t) \\ &= \sum_{i=0}^m m b_i \{ B_{i-1}^{m-1}(t) - B_i^{m-1}(t) \} \\ &= m \{ -b_0 B_0^{m-1}(t) + b_1 B_0^{m-1}(t) - b_1 B_1^{m-1}(t) + b_2 B_1^{m-1}(t) \\ &\quad - b_2 B_2^{m-1}(t) + \dots + b_{m-1} B_{m-2}^{m-1}(t) - b_{m-1} B_{m-1}^{m-1}(t) + b_m B_{m-1}^{m-1}(t) \} \\ &= m \{ (b_1 - b_0) B_0^{m-1}(t) + (b_2 - b_1) B_1^{m-1}(t) + \dots + (b_m - b_{m-1}) B_{m-1}^{m-1}(t) \} \\ &= m \sum_{i=0}^{m-1} (b_{i+1} - b_i) \cdot B_i^{m-1}(t).\end{aligned}$$

6. Rechnen Sie die drei Folgerungen aus der Beziehung für die höheren Ableitungen eines Bézier-Kurvensegments nach!

Lösung:

Folgerung 1: Die p -ten Ableitungen in den Endpunkten $K(a)$ bzw. $K(b)$ des Bézier-Segments hängen nur von den Kontrollpunkten b_0, \dots, b_p bzw. b_{m-p}, \dots, b_m ab.

Wir betrachten exemplarisch den Anfangspunkt $K(a)$. Es gilt $\Delta^0 b_i := b_i$. Aus der Formel für die höheren Ableitungen ergibt sich für $t = a$:

$$\begin{aligned}\frac{d^p}{dt^p}K(a) &= \frac{m!}{(m-p)!} \cdot \frac{1}{(b-a)^p} \cdot \sum_{i=0}^{m-p} \Delta^p b_i \cdot B_i^{m-p}(a) \\ &= \frac{m!}{(m-p)!} \cdot \frac{1}{(b-a)^p} \cdot \Delta^p b_0 \cdot B_0^{m-p}(a)\end{aligned}$$

Nun muss man sich die rekursive Definition von $\Delta^p b_0$ genauer anschauen.

Für $p = 0$ – die Kurve selbst – ist die Ableitung nur von $\Delta^0 b_0 = b_0$ abhängig.

Für $p = 1$ ist

$$\begin{aligned}\Delta^1 b_0 &= \Delta^0 b_1 - \Delta^0 b_0 \\ &= b_1 - b_0,\end{aligned}$$

die Ableitung ist also von b_0, b_1 abhängig.

Für $p = 2$ ist

$$\begin{aligned}\Delta^2 b_0 &= \Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0 \\ &= \Delta^0 b_2 - \Delta^0 b_1 - \Delta^0 b_1 + \Delta^0 b_0 \\ &= \Delta^0 b_2 - 2\Delta^0 b_1 + \Delta^0 b_0 \\ &= b_2 - 2b_1 + b_0,\end{aligned}$$

die Ableitung ist also von b_0, b_1, b_2 abhängig.

Für $p = 3$ ist

$$\begin{aligned}\Delta^3 b_0 &= \Delta^2 b_1 - \Delta^2 b_0 \\ &= \Delta^1 b_2 - \Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_0 \\ &= \Delta^0 b_3 - \Delta^0 b_2 - \Delta^0 b_2 + \Delta^0 b_1 \\ &\quad - \Delta^0 b_2 + \Delta^0 b_1 + \Delta^0 b_1 - \Delta^0 b_0 \\ &= b_3 - 3b_2 + 3b_1 - b_0,\end{aligned}$$

die Ableitung ist also von b_0, b_1, b_2, b_3 abhängig.

An dieser Stelle müsste man formal natürlich eine vollständige Induktion durchführen, die wir uns hier ersparen wollen. Kommt Ihnen das Bildungsgesetz eigentlich bekannt vor?

Folgerung 2: Die erste Ableitung in den Endpunkten $K(a)$ bzw. $K(b)$ des Bézier-Segments berechnet sich mittels $K'(a) = \frac{m}{b-a} \cdot (b_1 - b_0)$ und $K'(b) = \frac{m}{b-a} \cdot (b_m - b_{m-1})$.

Dies ist eine direkte Folgerung unserer obigen Betrachtungen für $p = 1$. Setzen Sie einfach in die vereinfachten Ableitungsformel ein.

Folgerung 3: Die zweite Ableitung in den Endpunkten $K(a)$ bzw. $K(b)$ des Bézier-Segments berechnet sich mittels $K''(a) = \frac{m(m-1)}{(b-a)^2} \cdot (b_2 - 2b_1 + b_0)$ und $K''(b) = \frac{m(m-1)}{(b-a)^2} \cdot (b_m - 2b_{m-1} + b_{m-2})$.

Auch dies ist eine direkte Folgerung unserer obigen vereinfachten Ableitungsformel für $p = 2$.

Führen Sie die Betrachtungen analog für den Endpunkt $t = b$ durch!

7. Gegeben sind zwei zusammenhängende Bézier-Kurvensegmente $K_0(t)$ und $K_1(t)$ vom Grad 3 über den lokalen Parameterintervallen $[0, 1]$ und $[1, 3]$, die an ihrer Segmenttrenngrenze $t = 1$ C^2 -stetig zusammengefügt sind. Wir bilden ein „neues“ erstes Segment mittels $\tilde{K}_0(t) = K_0(t^2)$ und betrachten die Gesamtkurve aus $\tilde{K}_0(t)$ und $K_1(t)$. Wie haben sich die Form und die Stetigkeit der Gesamtkurve verändert?

Lösung:

Da $K_0(t)$ mit $t \in [0, 1]$ und $K_1(t)$ mit $t \in [1, 3]$ an ihrer Segmenttrenngrenze $t = 1$ C^2 -stetig zusammengefügt sind, gilt:

$$\begin{aligned}K_0(1) &= K_1(1), \\ K'_0(1) &= K'_1(1) \text{ und} \\ K''_0(1) &= K''_1(1).\end{aligned}$$

$\tilde{K}_0(t)$ entsteht nun aus Umparametrisierung aus $K_0(t)$ mittels $\tilde{K}_0(t) = K_0(t^2)$. Damit ist $\tilde{K}_0(1) = K_0(1) = K_1(1)$; die Kurve ist also weiterhin C^0 -stetig. Bei der Differentiation ist allerdings die Kettenregel zu beachten. Es ist $\frac{d}{dt}\tilde{K}_0(t) = \frac{d}{dt}K_0(t^2) = 2tK_0'(t^2)$. Für die zweite Ableitung benötigt man noch die Produktregel. Es ist $\tilde{K}_0''(t) = 2K_0'(t^2) + 4t^2K_0''(t^2)$. Damit ist insgesamt:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_0(1) &= K_1(1), \\ \tilde{K}_0'(1) &= 2K_1'(1) \text{ und} \\ \tilde{K}_0''(1) &= 2K_1'(1) + 4K_1''(1).\end{aligned}$$

Gehen wir von einer nichtverschwindenden Ableitung bei $t = 1$ aus, ist die Gesamtkurve nicht mehr C^1 -stetig, aber noch G^1 -stetig, da sich die Richtung der Tangente bei $t = 1$ nicht verändert. Die C^2 -Stetigkeit geht verloren. Und was passiert mit der Form der Kurve? Die Form der Gesamtkurve bleibt erhalten.

3.5 Interpolation und Splines

1. Interpolieren Sie die Punkte $(0, 1)$, $(1, 0.5)$ und $(2, 0.2)$ mittels polynomialer Interpolation. Verwenden Sie einmal äquidistante und einmal chordale Parametrisierung. Wenden Sie nacheinander das Verfahren von Lagrange, das Newton-Schema und die Monom-Darstellung an!

Lösung:

Interpolation von $P_0 = (x_0, y_0) = (0, 1)$, $P_1 = (x_1, y_1) = (1, 0.5)$, $P_2 = (x_2, y_2) = (2, 0.2)$, mit einem Polynom zweiten Grades, $m = 2$.

Äquidistante Parametrisierung: Wir wählen $t_0 = 0, t_1 = 0.5, t_2 = 1$.

Monom-Ansatz:

x -Komponente: $f_x(t) = \sum_{i=0}^2 a_{xi} \cdot t^i, \quad i = 0, 1, 2.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{x0} \\ a_{x1} \\ a_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mit der Inversen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich $a_{x0} = 0, a_{x1} = 2, a_{x2} = 0$ und damit $f_x(t) = 0 + 2t + 0t^2 = 2t$.

y -Komponente: $f_y(t) = \sum_{i=0}^2 a_{yi} \cdot t^i, \quad i = 0, 1, 2.$

Mit der rechten Seite $(1, 0.5, 0.2)^T$ und der gleichen Inversen ergibt sich $a_{y0} = 1, a_{y1} = -1.2, a_{y2} = 0.4$ und damit $f_y(t) = 1 - 1.2t + 0.4t^2$.

Die Kurve hat in Parameterdarstellung damit die Gestalt

$$K(t) = (2t, 1 - 1.2t + 0.4t^2), \quad \text{für } t \in [0, 1].$$

Man überprüft leicht, dass die Interpolationsbedingungen $K(0) = (0, 1)$, $K(0.5) = (1, 0.5)$ und $K(1) = (2, 0.2)$ gelten.

Lagrange-Verfahren:

$$\begin{aligned} L_0(t) &= \frac{t-t_1}{t_0-t_1} \cdot \frac{t-t_2}{t_0-t_2} = \frac{t-0.5}{0-0.5} \cdot \frac{t-1}{0-1} = 2t^2 - 3t + 1, \\ L_1(t) &= \frac{t-t_0}{t_1-t_0} \cdot \frac{t-t_2}{t_1-t_2} = \frac{t-0}{0.5-0} \cdot \frac{t-1}{0.5-1} = -4t^2 + 4t, \\ L_2(t) &= \frac{t-t_0}{t_2-t_0} \cdot \frac{t-t_1}{t_2-t_1} = \frac{t-0}{1-0} \cdot \frac{t-0.5}{1-0.5} = 2t^2 - t. \end{aligned}$$

x -Komponente:

$$\begin{aligned} f_x(t) &= \sum_{i=0}^2 x_i \cdot L_i(t) \\ &= x_0 L_0(t) + x_1 L_1(t) + x_2 L_2(t) \\ &= 0 L_0(t) + 1 L_1(t) + 2 L_2(t) \\ &= 0 - 4t^2 + 4t + 4t^2 - 2t \\ &= 2t. \end{aligned}$$

y -Komponente:

$$\begin{aligned} f_y(t) &= \sum_{i=0}^2 y_i \cdot L_i(t) \\ &= y_0 L_0(t) + y_1 L_1(t) + y_2 L_2(t) \\ &= 1 L_0(t) + 0.5 L_1(t) + 0.2 L_2(t) \\ &= 0.4t^2 - 1.2t + 1. \end{aligned}$$

Newton-Verfahren:

x -Komponente:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0.5 & 1 \frac{1-0}{0.5-0} = 2 \\ 1 & 2 \frac{2-1}{1-0.5} = 2 \quad \frac{2-2}{1-0} = 0, \end{array}$$

$$f_x(t) = 0 + 2(t-0) + 0(t-0)(t-0.5) = 2t.$$

y -Komponente:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \frac{0.5-1}{0.5-0} = -1 \\ 1 & 0.2 \frac{0.2-0.5}{1-0.5} = -0.6 \quad \frac{-0.6+1}{1-0} = 0.4, \end{array}$$

$$f_y(t) = 1 - 1(t-0) + 0.4(t-0)(t-0.5) = 0.4t^2 - 1.2t + 1.$$

Chordale Parametrisierung:

Wir berechnen zunächst die Abstände der Interpolationspunkte

$$\Delta_0 = \|P_1 - P_0\| = \sqrt{1^2 + 0.5^2} = \sqrt{1.25} = 1.118,$$

$$\Delta_1 = \|P_2 - P_1\| = \sqrt{1^2 + 0.3^2} = \sqrt{1.09} = 1.044$$

und wählen anschließend

$$t_0 = 0, \quad t_1 = t_0 + \Delta_0 = 1.118, \quad t_2 = t_1 + \Delta_1 = 2.162.$$

Als Parameterintervall der Kurve wählen wir schließlich $[a, b] = [0, 2.162]$.

Als Lösung ergibt sich

$$K(t) = (0.863t + 0.029t^2, 1 - 0.53t + 0.074t^2), \text{ für } t \in [0, 2.162].$$

Führen Sie die verschiedenen Verfahren für den Fall dieser chordalen Parametrisierung durch und überprüfen Sie dieses Ergebnis!

2. Interpolieren Sie die Punkte $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(4, 2)$ und $(6, 6)$ mit einem einzelnen Bézier-Kurvensegment. Verwenden Sie chordale Parametrisierung!

Lösung:

Für die chordale Parametrisierung berechnen wir die Punktabstände:

$$\Delta_0 = \|P_1 - P_0\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1.41,$$

$$\Delta_1 = \|P_2 - P_1\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2.24,$$

$$\Delta_2 = \|P_3 - P_2\| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 4.47$$

und wählen anschließend

$$t_0 = 0, t_1 = t_0 + \Delta_0 = 1.41, t_2 = t_1 + \Delta_1 = 3.65, t_3 = t_2 + \Delta_2 = 8.12.$$

Als Parameterintervall der Kurve wählen wir schließlich $[a, b] = [0, 8.12]$.

Für die polynomiale Interpolation von vier Punkten benötigen wir den Polynomgrad 3, setzen also unsere Interpolationsbedingungen mit einem kubischen Bézier-Kurvensegment wie folgt an:

$$K(t_i) = \sum_{j=0}^3 b_j \cdot B_j^3(t_i) \stackrel{!}{=} P_i \quad \text{für } i = 0, \dots, 3.$$

Die Anfangs- und Endpunkt-Eigenschaft eines Bézier-Segments liefert uns direkt den ersten und letzten Kontrollpunkt: $b_0 = P_0 = (1, 2)$ und $b_3 = P_3 = (6, 6)$.

Für die anderen beiden Unbekannten b_1 und b_2 werten wir obige Bedingung für $i = 1, 2$ aus und erhalten daraus je zwei Gleichungen für die x - und für die y -Komponente. Dazu benötigen wir noch die Werte der kubischen Bernstein-Polynome zu den beiden Zeitwerten t_1 und t_2 . Mit

$$B_0^3(1.41) = 0.56, B_1^3(1.41) = 0.36, B_2^3(1.41) = 0.07, B_3^3(1.41) = 0.005 \text{ und}$$

$$B_0^3(3.65) = 0.17, B_1^3(3.65) = 0.41, B_2^3(3.65) = 0.33, B_3^3(3.65) = 0.09$$

und den Werten für b_0 und b_3 ergibt sich für die x - bzw. y -Komponente:

$$\begin{array}{l} 0.36b_{1x} + 0.07b_{2x} = 1.41 \\ 0.41b_{1x} + 0.33b_{2x} = 3.29 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{l} 0.36b_{1y} + 0.07b_{2y} = -0.15 \\ 0.41b_{1y} + 0.33b_{2y} = 1.12 \end{array}.$$

Mit der Inversen

$$\begin{pmatrix} 3.66 & -0.78 \\ -4.55 & 4.00 \end{pmatrix},$$

die sich für beide Komponenten verwenden lässt, resultieren die Lösungsvektoren $b_1 = (2.61, -1.42)$ und $b_2 = (6.73, 5.16)$.

3. Leiten Sie die kubischen Hermite-Polynome über $[a, b]$ her!

Lösung:

Die kubische Hermite-Interpolation soll die Funktionswerte und die Ableitungswerte an den Intervallgrenzen interpolieren. Dazu werden eben diese Werte mittels den Hermite-Polynomen $H_i(t)$ als Gewichte zusammen gemischt:

$$f(t) = x_0 H_0^3(t) + m_0 H_1^3(t) + m_1 H_2^3(t) + x_1 H_3^3(t)$$

Wir lassen im Folgenden die hochgestellte 3 zur Bezeichnung des Polynomgrads weg. $H_0(t)$ ist ein Polynom dritten Grades, das zu Beginn, also bei $t = a$ den Wert "1" annehmen soll. Am Ende, also bei $t = b$ soll es den Wert 0 annehmen. Dies sind zwei Bedingungen. Die Ableitung $H_0'(t)$ soll für $t = a$ und für $t = b$ ebenfalls identisch Null sein. $H_1(t)$ nimmt für $t = a$ und $t = b$ den Wert 0 an. $H_1'(t)$ ist ebenso identisch 0 für $t = b$, aber für $t = a$ hat die Ableitung den Wert 1. Sie haben die Konstruktionsidee erkannt? Werden die $H_i(t)$ so bestimmt, nimmt für $t = a$ nur x_0 Einfluss auf $f(t)$ und nur m_0 Einfluss auf $f'(t)$. Genauso nimmt für $t = b$ nur x_1 Einfluss auf $f(t)$ und nur m_1 Einfluss auf $f'(t)$.

Wir schauen uns zuerst die kubischen Hermite-Polynome $\tilde{H}_i^3(t)$ über $[0, 1]$ an und wählen für eine Herleitung exemplarisch $\tilde{H}_1(t)$ aus:

Es ist $\tilde{H}_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ und $\tilde{H}_1'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$ mit den Bedingungen:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_1(0) &= a_0 = 0, \\ \tilde{H}_1(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ \tilde{H}_1'(0) &= a_1 = 1, \\ \tilde{H}_1'(1) &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0.\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist sehr einfach zu lösen. Es ergibt sich $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = -2, a_3 = 1$. Damit ist $\tilde{H}_1(t) = t - 2t^2 + t^3$. Genau nach dem gleichen Muster resultieren die anderen Hermite-Polynome über $[0, 1]$ zu $\tilde{H}_0 = 1 - 3t^2 + t^3, \tilde{H}_2 = -t^2 + t^3$ und $\tilde{H}_3 = 3t^2 - 2t^3$.

Wir müssen jetzt die Konstruktionsidee und unsere bisherigen Ergebnisse nur noch auf das allgemeine Intervall $[a, b]$ übertragen. Bei der Interpolation der Werte, also bei H_0 und H_3 , können wir ohne Schaden an zurichten einfach mit der affinen Standard-Parametertransformation das Intervall $[a, b]$ auf $[0, 1]$ schrumpfen und die Hermite-Polynome \tilde{H}_0 und \tilde{H}_3 benutzen. Der Funktionswert bleibt an den betreffenden Stellen 0 bzw. 1. Es gilt also

$$\begin{aligned}H_0(s) &= \tilde{H}_0((s-a)/(b-a)) = 1 - 3 \left(\frac{s-a}{b-a} \right)^2 + 2 \left(\frac{s-a}{b-a} \right)^3, \\ H_3(s) &= \tilde{H}_3((s-a)/(b-a)) = 3 \left(\frac{s-a}{b-a} \right)^2 - 2 \left(\frac{s-a}{b-a} \right)^3\end{aligned}$$

für $s \in [a, b]$. Würden wir genau das gleiche beispielsweise für H_1 tun, also $H_1(s) = \tilde{H}_1((s-a)/(b-a))$, so würde beim Differenzieren nach s nach der Kettenregel der Faktor $1/(b-a)$ den angestrebten Wert 1 für $s = a$ zu $1/(b-a)$ werden lassen. Dem steuern wir entgegen, indem wir:

$$\begin{aligned}H_1(s) &= (b-a) \tilde{H}_1((s-a)/(b-a)) = (b-a) \left\{ \frac{s-a}{b-a} - 2 \left(\frac{s-a}{b-a} \right)^2 + \left(\frac{s-a}{b-a} \right)^3 \right\}, \\ H_2(s) &= (b-a) \tilde{H}_2((s-a)/(b-a)) = (b-a) \left\{ - \left(\frac{s-a}{b-a} \right)^2 + \left(\frac{s-a}{b-a} \right)^3 \right\}\end{aligned}$$

wählen. Damit sind die Hermite-Polynome für $[a, b]$ vollzählig. Überprüfen Sie zur Probe die Hermite-Bedingungen in den Endpunkten des Intervalls $[a, b]$ für diese Polynome!

4. Interpolieren Sie die Punkte $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(4, 2)$ und $(6, 6)$ durch einen chordal parametrisierten gewöhnlichen kubischen Bézier-Spline mit natürlichen Randbedingungen! Zeichnen Sie die Kurve und die Kontrollstrukturen auf! Verdeutlichen Sie sich an der Zeichnung die Übergangsbedingungen in den Segmenttrenngrenzen!

Lösung:

Zur Durchführung der stückweise kubischen Interpolation mit C^2 -Übergängen in den Segmenttrenngrenzen benötigen wir zuerst eine Parameterwahl. Wir interpolieren vier Punkte, benötigen damit $k + 1 = 3$ Segmente und suchen deshalb insgesamt 10 Bézier-Kontrollpunkte.

Für die chordale Parametrisierung berechnen wir die Punktabstände:

$$\Delta_0 = \|P_1 - P_0\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1.41,$$

$$\Delta_1 = \|P_2 - P_1\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2.24,$$

$$\Delta_2 = \|P_3 - P_2\| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 4.47$$

und wählen anschließend

$$t_0 = 0, t_1 = t_0 + \Delta_0 = 1.41, t_2 = t_1 + \Delta_1 = 3.65, t_3 = t_2 + \Delta_2 = 8.12.$$

Als Parameterintervall der Kurve wählen wir schließlich $[a, b] = [0, 8.12]$.

Die mittels unseres Gleichungsbündels zu ermittelnden Hilfspunkte d_l ($l = 0, \dots, 3$) reduzieren sich bei der Verwendung der natürlichen Randbedingungen auf die Unbekannten d_1 und d_2 . Wir verfahren nach unserem Algorithmus:

- (a) Wir setzen $b_0 = P_0 = (1, 2)$ und $b_9 = P_3 = (6, 6)$. An den Segmenttrenngrenzen setzen wir $b_3 = P_1 = (2, 1)$ und $b_6 = (4, 2)$.
- (b) Wir setzen $d_0 = b_0 = (1, 2)$ und $d_3 = b_9 = (6, 6)$.
- (c) Wir berechnen zuerst Werte der Hilfsgrößen:

$$\Delta_{-1} = \Delta_0 = 1.41, \Delta_1 = 2.24, \Delta_2 = \Delta_3 = 4.47,$$

$$C_0 = \Delta_{-1} + \Delta_0 + \Delta_1 = 5.06,$$

$$C_1 = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 = 8.12,$$

$$C_2 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 11.18,$$

$$A_0 = \Delta_0^2 \cdot C_0 = 10.13,$$

$$A_1 = \Delta_1^2 \cdot C_1 = 40.61,$$

$$A_2 = \Delta_2^2 \cdot C_2 = 223.61,$$

$$B_1 = (\Delta_0 + \Delta_1) \cdot C_1 \cdot C_0 = 150.16,$$

$$B_2 = (\Delta_1 + \Delta_2) \cdot C_2 \cdot C_1 = 609.18,$$

$$D_1 = \Delta_1(\Delta_{-1} + \Delta_0) \cdot C_1 + \Delta_0(\Delta_1 + \Delta_2) \cdot C_0 = 99.42,$$

$$D_2 = \Delta_2(\Delta_0 + \Delta_1) \cdot C_2 + \Delta_1(\Delta_2 + \Delta_3) \cdot C_1 = 344.96.$$

Wir erhalten das um zwei Gleichungen und zwei Unbekannte reduzierte Gleichungssystem für d_1 und d_2 :

$$A_1 d_0 + D_1 d_1 + A_0 d_2 = B_1 b_3,$$

$$A_2 d_1 + D_2 d_2 + A_1 d_3 = B_2 b_6.$$

$$99.42 d_1 + 10.13 d_2 = (259.70, 68.93),$$

$$223.61 d_1 + 344.96 d_2 = (2193.05, 974.69).$$

Die Inverse der Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 0.0108 & -0.0003 \\ -0.0070 & 0.0031 \end{pmatrix}$$

und es ergeben sich nach separater Betrachtung der x - und y -Komponente die Lösungsvektoren $d_1 = (2.103, 0.434)$ und $d_2 = (4.994, 2.544)$.

- (d) Nun müssen die noch unbekanntenen Bézier-Kontrollpunkte berechnet werden. Aus dem ersten Gleichungsbündel ergeben sich für $l = 1, 2, 3$ die Werte

$$b_1 = 1/C_0((\Delta_0 + \Delta_1)d_0 + \Delta_{-1}d_1) = (1.31, 1.56),$$

$$b_4 = 1/C_1((\Delta_1 + \Delta_2)d_1 + \Delta_0d_2) = (2.61, 0.80) \quad \text{und}$$

$$b_7 = 1/C_2((\Delta_2 + \Delta_3)d_2 + \Delta_1d_3) = (5.20, 3.24)$$

und aus dem dritten Gleichungsbündel für $l = 0, 1, 2$ die Werte

$$b_2 = 1/C_0((\Delta_1d_0 + (\Delta_{-1} + \Delta_0)d_1)) = (1.62, 1.13),$$

$$b_5 = 1/C_1((\Delta_2d_1 + (\Delta_0 + \Delta_1)d_2)) = (3.40, 1.38) \quad \text{und}$$

$$b_8 = 1/C_2((\Delta_3d_2 + (\Delta_1 + \Delta_2)d_3)) = (5.60, 4.62).$$

Damit sind alle Bézier-Kontrollpunkte berechnet und die drei Bézier-Segmente über den Kontrollpolygone (b_0, b_1, b_2, b_3) , (b_3, b_4, b_5, b_6) und (b_6, b_7, b_8, b_9) können gezeichnet werden.

In Abbildung 3.11 sehen Sie den gezeichneten Spline mit seinen Kontrollstrukturen. Beachten Sie die grafische Konstruktion der C^1 - und C^2 -Bedingungen an den Segmenttrenngrenzen!

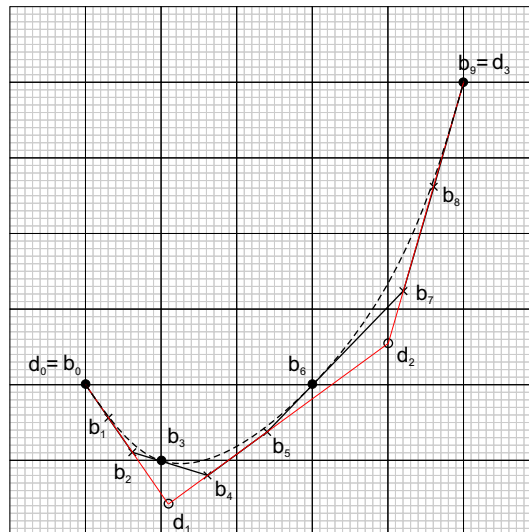


Abbildung 3.11: Die drei Bézier-Segmente des Bézier-Splines

5. Wählen Sie die Punkte $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(2, -1)$ als Gewichtspunkte eines frei modellierenden kubischen Bézier-Splines. Ermitteln Sie alle Bézier-Kontrollpunkte und zeichnen Sie die Kurve!

Lösung:

Bei einem frei modellierenden Bézier-Spline sind die Hilfspunkte bzw. Gewichtspunkte vorgegeben, aus denen sich mit Hilfe der drei Bündel von Gleichungen die Bézier-Kontrollpunkte berechnen lassen.

In diesem Fall ist *keine* Lösung von Gleichungssystemen notwendig. Die Kontrollpunkte werden einfach direkt ausgerechnet!

Da die Abstände zwischen den Segmenttrennpunkten nicht bekannt sind, wählen wir hier implizit die äquidistante Parametrisierung mit $\Delta_i = 1$ für alle i . Dies vereinfacht die Werte der anderen Hilfsgrößen auf $C_l = 3$, $A_l = 3$, $B_l = 18$ und $D_l = 12$ für alle l .

Damit vereinfachen sich die drei Gleichungsbündel auf:

$$\begin{aligned}(2d_{l-1} + d_l)/3 &= b_{3l-2} \quad \text{für } l = 1, \dots, k+1, \\ (d_{l-1} + 4d_l + d_{l+1})/6 &= b_{3l} \quad \text{für } l = 1, \dots, k, \\ (d_l + 2d_{l+1})/3 &= b_{3l+2} \quad \text{für } l = 0, \dots, k,\end{aligned}$$

In unserem Fall haben wir 3 Hilfspunkte $d_0 = (0, 0)$, $d_1 = (1, 1)$ und $d_2 = (2, -1)$, also 2 Bézier-Segmente; k hat damit den Wert $k = 1$.

Damit ist $b_0 = d_0 = (0, 0)$ und $b_6 = d_2 = (2, -1)$.

Die restlichen Kontrollpunkte berechnen wir für $l = 1, 2$ aus

$$\begin{aligned}b_1 &= (2d_0 + d_1)/3 = (1/3, 1/3), \\ b_4 &= (2d_1 + d_2)/3 = (4/3, 1/3),\end{aligned}$$

und für $l = 1$ aus

$$b_3 = (d_0 + 4d_1 + d_2)/6 = (1, 1/2),$$

und für $l = 0, 1$ aus

$$\begin{aligned}b_2 &= (d_0 + 2d_1)/3 = (2/3, 2/3), \\ b_5 &= (d_1 + 2d_2)/3 = (5/3, -1/3).\end{aligned}$$

Damit sind alle Bézier-Kontrollpunkte berechnet und die beiden Bézier-Segmente über den Kontrollpolygone (b_0, b_1, b_2, b_3) und (b_3, b_4, b_5, b_6) können gezeichnet werden.

In Abbildung 3.12 sehen Sie den gezeichneten Spline mit seinen Kontrollstrukturen. Beachten Sie die grafische Konstruktion der C^1 - und C^2 -Bedingungen an den Segmenttrenngrenzen!

3.6 B-Spline-Kurven

1. Rechnen Sie für den gegebenen Knotenvektor $T = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ nach, dass die B-Spline-Basisfunktionen $N_i^4(t)$, ($i = 0, \dots, 3$) in die Bernstein-Polynome $B_i^3(t)$ über dem Intervall $[0, 1]$ übergehen!

Lösung:

Alle B-Spline-Basisfunktionen einer Ordnung o können über die Formel von Cox und de Boor rekursiv aus den Basisfunktionen der Ordnung $o - 1$ gewonnen werden. Der Knotenvektor $T = (t_i)_{i=0, \dots, n}$ mit $n + 1$ Knoten sei vorgegeben:

$$\begin{aligned}N_j^1(t) &:= \begin{cases} 1 & t_j \leq t < t_{j+1}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad j = 0, \dots, n-1 \\ N_j^o(t) &:= \frac{t - t_j}{t_{j+o-1} - t_j} \cdot N_j^{o-1}(t) + \frac{t_{j+o} - t}{t_{j+o} - t_{j+1}} \cdot N_{j+1}^{o-1}(t) \quad o > 1, j = 0, \dots, n-o.\end{aligned}$$

Ist ein Nenner 0 ist auch die in diesem Summanden beteiligte B-Spline-Basisfunktion 0 – der Summand fällt weg.

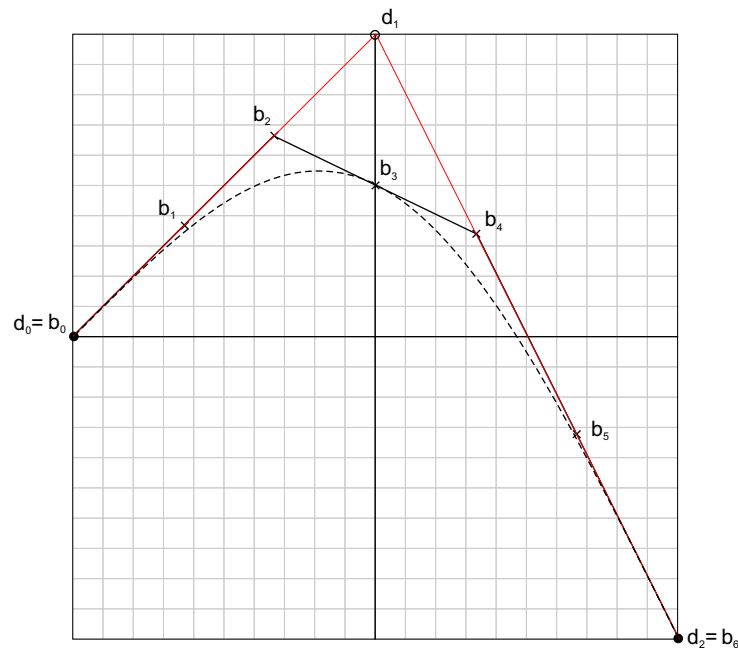


Abbildung 3.12: Die beiden Bézier-Segmente des frei modellierenden Bézier-Splines

Wir betrachten den Knotenvektor $T = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ und $o = 4$. Es gilt also $n = 7$ und $t_0 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = 0, t_4 = 1, t_5 = 1, t_6 = 1, t_7 = 1$. Wir berechnen nacheinander die B-Spline-Basisfunktionen der Ordnungen 1 bis 4:

Ordnung $o = 1$:

$$N_j^1(t) = \begin{cases} 1 & t_j \leq t < t_{j+1}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad j = 0, \dots, 6.$$

Damit ist

$$N_0^1 = N_1^1 = N_2^1 = 0 \text{ und } N_4^1 = N_5^1 = N_6^1 = 0$$

und

$$N_3^1(t) = 1 \text{ für } 0 = t_3 \leq t < t_4 = 1.$$

Ordnung $o = 2$:

$$N_j^2(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \cdot N_j^1(t) + \frac{t_{j+2} - t}{t_{j+2} - t_{j+1}} \cdot N_{j+1}^1(t), \quad j = 0, \dots, 5.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} N_0^2(t) &= \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \cdot N_0^1(t) + \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \cdot N_1^1(t) = 0 \\ N_1^2(t) &= \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \cdot N_1^1(t) + \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2} \cdot N_2^1(t) = 0 \\ N_2^2(t) &= \frac{t - t_2}{t_3 - t_2} \cdot N_2^1(t) + \frac{t_4 - t}{t_4 - t_3} \cdot N_3^1(t) = 0 + (1 - t) = 1 - t \\ N_3^2(t) &= \frac{t - t_3}{t_4 - t_3} \cdot N_3^1(t) + \frac{t_5 - t}{t_5 - t_4} \cdot N_4^1(t) = t + 0 = t \\ N_4^2(t) &= \frac{t - t_4}{t_5 - t_4} \cdot N_4^1(t) + \frac{t_6 - t}{t_6 - t_5} \cdot N_5^1(t) = 0 \\ N_5^2(t) &= \frac{t - t_5}{t_6 - t_5} \cdot N_5^1(t) + \frac{t_7 - t}{t_7 - t_6} \cdot N_6^1(t) = 0. \end{aligned}$$

Ordnung $o = 3$:

$$N_j^3(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+2} - t_j} \cdot N_j^2(t) + \frac{t_{j+3} - t}{t_{j+3} - t_{j+1}} \cdot N_{j+1}^2(t) \quad , j = 0, \dots, 4.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} N_0^3(t) &= \frac{t - t_0}{t_2 - t_0} \cdot N_0^2(t) + \frac{t_3 - t}{t_3 - t_1} \cdot N_1^2(t) = 0 \\ N_1^3(t) &= \frac{t - t_1}{t_3 - t_1} \cdot N_1^2(t) + \frac{t_4 - t}{t_4 - t_2} \cdot N_2^2(t) = 0 + (1 - t)^2 = (1 - t)^2 \\ N_2^3(t) &= \frac{t - t_2}{t_4 - t_2} \cdot N_2^2(t) + \frac{t_5 - t}{t_5 - t_3} \cdot N_3^2(t) = t(1 - t) + (1 - t)t = 2t(1 - t) \\ N_3^3(t) &= \frac{t - t_3}{t_5 - t_3} \cdot N_3^2(t) + \frac{t_6 - t}{t_6 - t_4} \cdot N_4^2(t) = t^2 + 0 = t^2 \\ N_4^3(t) &= \frac{t - t_4}{t_6 - t_4} \cdot N_4^2(t) + \frac{t_7 - t}{t_7 - t_5} \cdot N_5^2(t) = 0. \end{aligned}$$

Ordnung $o = 4$:

$$N_j^4(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+3} - t_j} \cdot N_j^3(t) + \frac{t_{j+4} - t}{t_{j+4} - t_{j+1}} \cdot N_{j+1}^3(t) \quad , j = 0, \dots, 3.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} N_0^4(t) &= \frac{t - t_0}{t_3 - t_0} \cdot N_0^3(t) + \frac{t_4 - t}{t_4 - t_1} \cdot N_1^3(t) = 0 + (1 - t)^3 = (1 - t)^3 \\ N_1^4(t) &= \frac{t - t_1}{t_4 - t_1} \cdot N_1^3(t) + \frac{t_5 - t}{t_5 - t_2} \cdot N_2^3(t) = t(1 - t)^2 + 2t(1 - t)^2 = 3t(1 - t)^2 \\ N_2^4(t) &= \frac{t - t_2}{t_5 - t_2} \cdot N_2^3(t) + \frac{t_6 - t}{t_6 - t_3} \cdot N_3^3(t) = 2t^2(1 - t) + t^2(1 - t) = 3t^2(1 - t) \\ N_3^4(t) &= \frac{t - t_3}{t_6 - t_3} \cdot N_3^3(t) + \frac{t_7 - t}{t_7 - t_4} \cdot N_4^3(t) = t^3 + 0 = t^3. \end{aligned}$$

Damit ist $N_i^4(t) = B_i^3(t) = \binom{3}{i} t^i (1 - t)^{3-i}$, $i = 0, \dots, 3$.

2. Implementieren Sie ein Programm zum Zeichnen einer offenen B-Spline-Kurve der Ordnung 4. Benutzen Sie die Rekursionsformel nach Cox und de Boor und alternativ den de Boor-Algorithmus! Verwenden Sie nicht die OpenGL-Funktionalitäten für NURBS!

Lösung:

Ein entsprechendes Beispielprogramm finden Sie in den Quellcodes zu diesem Kapitel.

Erweitern Sie dieses Programm so, dass es B-Splines beliebiger Ordnung zeichnen kann!

3.7 Parametrische Flächendarstellungen

1. Zeigen Sie die Unabhängigkeit des Tensorprodukt-Ansatzes von der gewählten Richtung!

Lösung:

Gegeben ist ein Bézier-Kontrollnetz mit den Punkten b_{ij} , $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$. Wir zeigen, dass die Idee ein Bézier-Kurvensegment $\sum_{j=0}^m b_{0j} \cdot B_j^m(v)$ durch den Raum zu bewegen, indem man seine Kontrollpunkte b_{0j} auf eigenen Bézier-Kurvensegmenten entlang der Kontrollpunkte b_{ij} bewegt, auch umgedreht werden kann. Orientieren Sie sich zu besserer Vorstellung an Abbildung 3.50.

Wir beginnen also mit einem Bézier-Kurvensegment $\sum_{i=0}^n b_{i0} \cdot B_i^n(u)$ und ersetzen jeden Kontrollpunkt b_{i0} durch ein eigenes Kurvensegment $\sum_{j=0}^m b_{ij} \cdot B_j^m(v)$. Setzt man die Kontrollpunkt-Kurvensegment in das erste Segment ein, ergibt sich unmittelbar $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} \cdot B_j^m(v) B_i^n(u)$.

2. Die Iso-Parameterlinien eines Tensorprodukt-Flächensegments eines bestimmten Typs sind Kurven des gleichen Typs. Wie verhält es sich mit einer beliebigen Kurve auf dem Flächen-segment?

Lösung:

Eine beliebige Flächenkurve ist leider i. d. R. *keine* Kurve des gleichen Typs! Dies macht insbesondere das Trimmen und das Blenden von Flächen so schwierig.

3. Zeigen Sie die Eckpunkt- und die Randkurven-Eigenschaft eines Bézier-Flächensegments!

Lösung:

Sei $F(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} \cdot B_i^n(u) B_j^m(v)$ mit $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ gegeben.

Eckpunkt-Eigenschaft:

Wir wählen exemplarisch den Punkt mit dem Parameterwert $(0, d)$ aus. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} F(0, d) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} \cdot B_i^n(0) B_j^m(d) \\ &= \sum_{j=0}^m b_{0j} \cdot B_0^n(0) B_j^m(d) \\ &= b_{0m} \cdot B_0^n(0) B_m^m(d) \\ &= b_{0m} \cdot 1 = b_{0m}. \end{aligned}$$

Für die anderen drei Eckpunkte ist der Nachweis analog.

Randkurven-Eigenschaft:

Wir wählen exemplarisch die Randkurve aus, auf der $u = a$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} F(a, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} \cdot B_i^n(a) B_j^m(v) \\ &= \sum_{j=0}^m b_{0j} \cdot B_0^n(a) B_j^m(v) \\ &= \sum_{j=0}^m b_{0j} \cdot B_j^m(v), \end{aligned}$$

was genau dem Bézier-Kurvensegment der Kontrollpunkte b_{0j} , $j = 1, \dots, m$ entspricht. Die anderen drei Randkurven sind analog zu erzeugen.

4. Formulieren Sie die Eigenschaft der „linearen Präzision“ für ein Bézier-Flächensegment! Was bedeutet diese?

Lösung:

Analog zum Fall eines Bézier-Kurvensegments reproduziert ein Bézier-Flächensegment bei regelmäßiger Verteilung der Kontrollpunkte in einem Rechteck dieses Rechteck ohne Verzerrungen.

Sei o. b. d. A. ein Rechteck in der xy -Ebene gegeben durch seine Eckpunkte (x_{min}, y_{min}) und (x_{max}, y_{max}) . Die Kontrollpunkte seien wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \left(x_{min} + i \cdot \frac{x_{max} - x_{min}}{n}, y_{min} + j \cdot \frac{y_{max} - y_{min}}{m} \right) \\ &= \left(\left(1 - \frac{i}{n}\right) \cdot x_{min} + \frac{i}{n} \cdot x_{max}, \left(1 - \frac{j}{m}\right) \cdot y_{min} + \frac{j}{m} \cdot y_{max} \right), \end{aligned}$$

mit $i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} \cdot B_i^n(t) B_j^m(t) \\ &= \left((1-u) \cdot x_{min} + u \cdot x_{max}, (1-v) \cdot y_{min} + v \cdot y_{max} \right) \end{aligned}$$

3.10 Fallstudien

3.10.1 Freiformgeometrie in OpenGL

1. Schreiben Sie ein OpenGL-Programm, das die restlichen Kurven aus Abbildung 3.21 realisiert! Testen Sie Ihr Programm zusätzlich mit echten Raumkurven!

Lösung:

Das gegebene Beispielprogramm `BezierKurvensegmente` zu dieser Fallstudie realisiert die planare Kurve aus Teilabbildung b) in Abbildung 3.21. Die Kurven für die anderen Teilabbildungen haben ebenfalls den Grad 3. Damit können Sie einfach das Beispielprogramm als Vorlage benutzen und die Kontrollpunkte abändern. Wir schlagen folgende Wahl der Kontrollpunkte vor:

Für die Kurve aus Teilabbildung a) in Abbildung 3.21

```
GLfloat ctrlPoints[4][3]= // Array der Kontrollpunkte
{{1.73, 1.84}, {2.02, 4.23, 0.00},
 {5.18, 6.35, 0.00}, {8.39, 6.13, 0.00}};
```

Für die Kurve aus Teilabbildung c) in Abbildung 3.21

```
GLfloat ctrlPoints[4][3]= // Array der Kontrollpunkte
{{1.73, 2.00}, {3.24, 6.11, 0.00},
 {5.82, 2.19, 0.00}, {7.74, 6.12, 0.00}};
```

Für die Kurve aus Teilabbildung d) in Abbildung 3.21

```
GLfloat ctrlPoints[4][3]= // Array der Kontrollpunkte
{{1.69, 5.34}, {7.63, 4.07, 0.00},
 {3.04, 2.01, 0.00}, {4.18, 5.91, 0.00}};
```

Zum Test mit echten Raumkurven müssen Sie lediglich die z -Koordinaten der Kontrollpunkte auf sinnvolle Werte setzen. Der im Beispielprogramm eingesetzte interaktive Manipulator ermöglicht dann sehr einfach das räumliche Erkunden der Kurve.

Erweitern Sie das Beispielprogramm so, dass es Bézier-Kurvensegmente beliebigen Grads darstellen kann!

2. Vervollständigen Sie das Programm zur Anzeige des Utah-Teapots, so dass der gesamte Teapot dargestellt wird! Generieren Sie auch eine Ausgabe des Teapots mit ausgefüllten Flächen!

Lösung:

Sie müssen aus den 9 vorhandenen Segmenten durch Spiegelungen noch insgesamt weitere 19 Segmente erzeugen. Beispielsweise fehlen für die Krempe noch 3 Segmente und für den Deckel noch 6 Segmente. Verwenden Sie dazu das vorgegebene Programmgerüst `UtahTeapot` zu dieser Fallstudie.

Das Ergebnis finden Sie ebenfalls als Quellcode `UtahTeapotWire` zu dieser Fallstudie. Vollziehen Sie die Änderungen am Quellcode nach!

Wollen wir nun einen Teapot mit ausgefüllten Flächen darstellen, müssen wir nur noch Licht und Materialien definieren und die Flächendarstellung einschalten. Das Ergebnis finden Sie unter `UtahTeapotFaces`. Aber halt, warum ist der Teapot denn kariert? Wir haben Vorder- und Rückseiten unterschiedliche Materialien gegeben! Mit unseren naiven Spiegelungen zur Herstellung der fehlenden Segmente, haben wir Vorder- und Rückseiten im Modell gemischt! Dies ist uns bei der Gitterliniendarstellung nicht aufgefallen. Der Durchlaufsinn der entstehenden Primitive ist hier für die einzelnen Segmente unterschiedlich. Die Orientierung eines Segments wurde bereits für Sie korrigiert. Korrigieren Sie alle restlichen Segmente!

3. Experimentieren Sie mit der Darstellung des NURBS-Flächensegments und vergewissern Sie sich insbesondere, dass Sie den hier notwendigen Umgang mit den homogenen Koordinaten verstanden haben!

Lösung:

Das notwendige Programmgerüst finden Sie unter den Quelldateien zu dieser Fallstudie als `NURBSFlächensegment`.